

---

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**PREGRADO EN MATEMÁTICAS**

---

**Código :** CNM-503

**Nombre :** Números Transfinitos

**Prerrequisitos:** CNM-240, CNM 300, CNM 345, CNM 350,

**Correquisito:** CNM 400

**Duración del semestre:** 16 semanas

**Intensidad semanal:** 4 horas teóricas

**Número de créditos:** 4

**Campo de formación:** Electiva en ciencias

**Programa a los cuales se ofrece:** Matemáticas

Este curso es habilitable y validable.

---

## 1. Objetivos

### 1.1 Generales

- Desarrollar ciertos tópicos intermedios de la teoría de conjuntos.
- Lograr que el estudiante capte las sutilezas y dificultades que resultan al introducir el concepto de *infinito actual*.
- Lograr que el estudiante distinga las propiedades de los conjuntos contables y no contables.
- Lograr que el estudiante adquiera un conocimiento claro y concreto de ciertas nociones más sofisticadas de la Teoría de Conjuntos que le serán de utilidad en ramas de la matemática abstracta como el análisis real, la topología, la teoría de la medida y el análisis funcional.

### 1.2 Específicos

Equipotencia de conjuntos. Propiedades de los conjuntos finitos, contables e infinitos. Axiomas provisionales de cardinalidad. Aritmética de Cardinales. Orden en los cardinales. Teorema de Schröder-Berstein.

Introducir el Axioma de Elección. Probar algunas de las equivalencias más básicas. Presentar los principios maximales. Probar el teorema de Zermelo. A partir del axioma de elección, probar que las propiedades especiales del producto y la suma de cardinales transfinitos. Probar que la unión de contables es contables y desarrollar algunas consecuencias de este hecho (alfabetos, existencia de reales trascendentes).

Desarrollar la teoría de conjuntos bien ordenados. Definir los números ordinales. Probar las propiedades básicas de los ordinales. Enfatizar en el  $\epsilon$ -orden. Dar otras definiciones de número ordinal, lo cual exige el *axioma de regularidad* (Opcional). Mostrar que todo conjunto bien ordenado es isomórfico a un único ordinal. Introducir el *esquema axiomático de reemplazamiento*. Desarrollar

los teoremas de recursión transfinita. Definir la aritmética mediante recursión y mediante el tipo de orden.

Definir los números cardinales como ordinales iniciales. Presentar la función Aleph de Hartogs, y mediante ésta y recursión transfinita, probar la existencia de la *jerarquía de alephs*. Enfatizar la necesidad del axioma de elección en esta construcción.

Quedan dos posibilidades. estudiar las sumas y productos infinitos de alephs, la exponenciación cardinal, la noción de cofinalidad y los cardinales regulares y singulares. O dedicarse a sentar las bases del análisis y el álgebra: construir los enteros, a partir de los naturales, como clases de equivalencia de “diferencias” y los racionales, a partir de los enteros, como clases de equivalencia de “fracciones”. A partir de los racionales, quedan dos caminos para crear un modelo de la recta real: cortaduras de Dedekind o clases de equivalencias de sucesiones de Cauchy de números racionales.

## 2. Contenido Resumido Del Programa

Equipotencia y Números Cardinales. Axioma de Elección. Números Ordinales. Construcción de los números cardinales. Quedan como opción, escoger uno de estas unidades. Propiedades y Aritmética de Alephs. Construcción de la recta real.

## 3. Contenido

### Unidad 1. Equipotencia y Números Cardinales

Duración: 16 horas

- Cardinalidad de conjuntos finitos y contables.
- Axiomas de cardinalidad.
- Aritmética cardinal.
- Orden en los cardinales.
- El Teorema de Schröder-Berstein.
- Conjuntos no contables

### Unidad 2. Axioma de Elección

Duración: 10 horas.

- Formas básicas del Axioma de Elección.
- Principios Maximales. Lema de Zorn.
- El Teorema de Buen Orden.
- Propiedades especiales de los cardinales infinitos.

### Unidad 3 Números Ordinales

Duración: 16 horas.

- Conjuntos bien ordenados.
- Construcción de los Ordinales.
- Propiedades y  $\epsilon$ -orden en los ordinales.
- El axioma de regularidad y las definiciones de ordinal. (Opcional)
- El axioma de reemplazamiento. Recursión Transfinita.
- Aritmética ordinal mediante tipos de orden.
- Aritmética ordinal mediante recursión transfinita.

#### **Unidad 4 Construcción de los Números Cardinales.**

Duración: 6 horas.

- Ordinales iniciales.
- La función Aleph de Hartogs.
- La jerarquía transfinita de alephs

#### **Opcionales:**

#### **Unidad 5 Propiedades y Aritmética de Alephs**

Duración: 10 horas.

- Sumas y productos infinitos.
- Exponenciación.
- Cofinalidad.
- Cardinales regulares y singulares.

#### **Unidad 6 Construcción de la recta real**

Duración: 12 horas.

- Números Enteros.
- Números Racionales.
- Cortaduras de Dedekind.
- Sucesiones de Cauchy.

#### **4. Metodología**

- Exposición del profesor en clase.
- Talleres.
- Documentos acerca de ciertos tópicos adicionales.
- Selección de problemas y ejercicios para realizar fuera de clase con asesoría del profesor.

#### **5. Evaluación**

A convenir con los estudiantes.

#### **6. Bibliografía**

##### **Textos Guías**

Hrbacek y Jech. *Introduction to Set Theory*. Marcel and Dekker, 1999.  
Pinter, C. *Set Theory*. Addison-Wesley, 1971.  
Enderton, H. *Elements of Set Theory*. Academic Press, 1977.

##### **Textos Complementarios**

Monk, D. *Introduction to Set Theory*. McGraw-Hill, 1969.  
Halmos, P. *Teoría intuitiva de conjuntos*. Continental, 1973.

Lipschutz, S. *Teoría y problemas de Teoría de Conjuntos y temas afines*. McGraw-Hill, 1991,70.  
Takeuti y Zaring *Introduction to Axiomatic Set Theory*. Springer-Verlag, 1971.  
Lang, S. *Undergraduate Algebra*. Springer-Verlag, 1990.  
Phillips, E. *Introduction to analysis and Integration Theory*. Dover, 1984.

---

Realizado por:

Johany Alexis Suárez Ramírez [jasr03@matematicas.udea.edu.co](mailto:jasr03@matematicas.udea.edu.co)

