UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
ÁREA DE PREGRADO EN MATEMÁTICAS

Código : CNM-510
Nombre : Análisis Funcional
Prerrequisitos: CNM-455
Duración del semestre: 16 semanas
Intensidad semanal: 4 horas teóricas
Número de créditos: 4
Campo de formación: Profesional
Tipo de curso: Teórico
Este curso es habilitable y validable.
Programas a los cuales se ofrece: Matemáticas

---

1. objetivos

Generales

Al cursar y aprobar esta asignatura, el estudiante estará en capacidad de:

- Formular en el lenguaje de espacios normados diversos tipos de problemas concretos y aprovechar las ventajas que de esta formulación ofrece para su solución.
- Comprender ciertas aplicaciones de la teoría abstracta de espacios normados a problemas de ecuaciones diferenciales y/o integrales.
- Comprender ciertas estructuras topológico-algebraicas y los métodos que el conocimiento de estas estructuras (espacios de Hilbert, de Banach, teoría espectral) permite aplicar a los problemas analíticos.
- Conocer la topología y la geometría de ciertos espacios abstractos
- Estudiar los espacios clásicos de Banach, Categoría de Baire. Teorema de la función abierta, del grafico cerrado, ortogonalidad espacios duales, operadores compactos y teoría espectral.

Específicos

Una vez aprobada esta asignatura, el alumno debe estar en capacidad de:

- Identificar en diferentes situaciones la estructura del espacio normado.
- Reconocer los espacios normados como caso especial de espacios métricos, al mismo tiempo podrá resolver problemas en espacios normados y en espacios métricos
- Establecer la continuidad de ciertos funcionales lineales en espacios normados.
- Distinguir espacios normados completos e incompletos.
- Caracterizar los duales topológicos de los espacios Lp, Lp, $1<p<\infty$.
- Calcular la norma para ciertos operadores lineales y acotados.
- Será capaz de demostrar cuando un operador lineal es continuo, de igual manera cuando un operador lineal es compacto.
- Formular y utilizar adecuadamente los teoremas de la aplicación abierta, del gráfico cerrado y el principio de acotamiento uniforme.

- Definir los conceptos de espacio con producto interno y espacio de Hilbert y determinar cuándo una norma proviene de un producto interno.
- Aplicar el proceso de ortogonización de Gram-Schamidt en ciertos espacios de Hilbert especiales.
- Utilizar la identidad de Parseval en el cálculo de las sumas de ciertas series.
- Definir el adjunto de una operación en un espacio de Hilbert.
- Aplicar el Teorema de Hahn-Banach para obtener resultados en los que esté involucrado dicho teorema.
- Definir y ejemplificar las nociones de valor y vector propio de un operador.
- Formular y demostrar las principales propiedades de los operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert.
- Aplicar el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos a la solubilidad de ciertos tipos de ecuaciones integrales y/o diferenciales.

2. Contenido

Unidad 1: Espacios normales y espacios de banach.
Duración 18 horas.

- Definición de los conceptos de espacio normado y espacio de Banach. Ejemplos.
- Los espacios de sucesiones como espacios normados: L^p, l_{∞}, C, Co. Completitud de estos espacios.
- Los espacios de funciones Lebesgue-Integrables L^p como espacios de Banach. Los espacios de funciones continuas, completa según la norma escogida.
- Funciones lineales y acotadas en espacios normados. La norma de un funcional. Ejemplos.
- Dual topológico y dual algebraico de un espacio normado. Caracterización del dual topológico como espacio de Banach.
- Segundo dual topológico y algebraico. Reflexividad. Bases duales en espacios finitos dimensionales.
- Los duales topológicos de L^p, L^p, $1<p<\infty$.
- Teorema de Hahn-Banach. Aplicaciones.

Unidad 2: Operadores lineales en espacios normados.
Duración 13 horas.

- Definiciones y teoremas generales.
- Ejemplos de operadores acotados y no acotados.
- Propiedades generales de los operadores lineales acotados.
- Teorema de la aplicación abierta. Aplicaciones.
- Operadores cerrados. Teorema del gráfico cerrado.
- Principio de acotamiento uniforme. Noción de convergencia débil.

Unidad 3: Espacios de Hilbert.
Duración 15 horas.

- Definiciones y ejemplos. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
- Ortogonalidad y teorema de Riesz sobre el vector minimizante. Descomposición de un espacio de Hilbert como suma directa de un espacio cerrado y su complemento ortogonal.

- Teorema de Riesz. Conjuntos ortogonales. Proceso de Gram-Schimdt y desigualdad de Bessel.
- Propiedad variacional de los coeficientes de Fourier. El sistema ortogonal completo de funciones trigonométricas L^2, $[-\pi, \pi]$.
- Identidad de Parseval y aplicaciones al cálculo de series.
- Definición del operador adjunto. Propiedades de la operación de adjunción.

Unidad 4: Introducción a la teoría espectral de operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert.
Duración 18 horas.

- Nociones de valor y vector propio de un operador. Ejemplos.
- Espectro y resolvente de un operador.
- Definición, ejemplos y propiedades de operadores compactos.
- Operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert. Ejemplos.
- Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos.
- Aplicación del teorema espectral a la ecuación integral de Fredholm de segunda clase.
- Problemas físicos que dan lugar a ecuaciones de Fredholm de segunda clase.
- Solubilidad de la ecuación de Fredholm, vía al teorema espectral.

4. Metodología

Conferencia magistral y discusión de problemas.

5. Forma de Evaluación

A de finar por el profesor del curso.

6. Bibliografía

- **Texto Guía:** Kreyszig, Erwin. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley. New York, 1978.
- Brezis, H. Análisis funcional. Teoría y Aplicaciones. Alianza Editorial. Madrid,. 1984.
- Groetsch, Ch. Elements of applicable Functional Analysis. Marcel Dekker. New York, 1980.
- Kolmogorov, A.N. Fomin S.V. Introductory Real Analysis. Dover Publications. New York, 1975.
- Simmon, G.F. Introductions to Topology and Modern Analysis. Mc Graw-Hill. Tokyo, 1963.
- Taylor, A., Lay D. Introductions to Functional Analysis. Second Edition. John Wiley and Sons. New York, 1980.
- J. B. CONWAY, A Course in Functional Analysis, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer-Verlag, New York, 1985.
- W. Rudin, Análisis Funcional, Ed. Reverté, S.A., 1979.
- Bachman, G; Narici L. Analisis Funcional. Madrid Tecnos 1981
- Oden, J; Demkowicz L. Applied Functional Analysis. CRC Press New York 1996.

Actualizado por: Oscar Iván Giraldo Galeano