UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
ÁREA DE PREGRADO EN MATEMÁTICAS

Código : CNM -511
Nombre : Análisis Tensorial
Prerrequisitos : CNM 205
Duración del semestre : 16 semanas
Intensidad semanal : 4 horas
Créditos : 4
Campo de formación : Area electiva
Programa a los cuales se ofrece : Matemáticas

1. Objetivos:

2. Contenido

Capítulo 1:
Base recíprocas. La métrica de un espacio y sus propiedades

- La conversión de Einstein: ejemplos. El espacio E^3.
- La base recíproca de una base dada: definición, propiedades y significado geométrico. La base recíproca de la base recíproca.
- Componentes CONTRAVARIANTES y componentes COVARIANTES de un vector: Cálculos de estas componentes.
- Expresión de los vectores de una base como una combinación lineal de los vectores de una base recíproca. Variación de una métrica cuando se cambia de base.
- El determinante de la métrica definida por una base y el volumen de un paralelepípedo asociado a la base.
- Cálculo de las componentes COVA (CONTRA) de un vector, conocidas las componentes CONTRA (COVA) utilizando la métrica. Ejemplos: otras propiedades de la bases recíprocas: la base recíproca de una base ortogonal. Igualdad entre las componentes COVA y CONTRA de un vector cuando su base es ortogonal.
- Producto de los volúmenes de los paralelepípedos asociados a una base y a su base recíproca.
- Importancia geométrica del espacio con respecto a una base: (a) obtención de un producto escalar entre vectores conocidas sus componentes COVA y CONTRA de un vector cuando su base es ortogonal. (b) cálculo del ángulo entre los vectores, (c) cálculo de la norma de un vector, (d) cálculo de la distancia entre dos puntos.
- Expresiones para los componentes COVA y CONTRA de AxB. Cálculo del producto mixto A•(BxC)=[ABC], conocidas las componentes COVA y CONTRA de los vectores A,B,C. Una fórmula para calcular el volumen de un paralelepípedo. Una fórmula para calcular el volumen de un tetraedro en términos de aristas que parten un vértice y los ángulos entre ellas.

Capítulo 2
Transformación de coordenadas. Jacobianos y sistemas de coordenadas curvilíneas (scc). Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales (scco).

- La norma de un vector y conjuntos abiertos en R^n.
- La diferencial de una función. Unicidad de la diferencial. Teorema de la regla de cadena. Demostración y ejercicios.
- Transformación de coordenadas de R^n. El jacobiano de una transformación de coordenadas. El caso lineal (transformaciones afines). Transformaciones afines ortogonales.
- El teorema de la función inversa y el grupo de las transformaciones en R^n. Subgrupos de este grupo.
- Propiedades de la matriz jacobiana de una transformación de coordenadas y su matriz inversa.
- Sistemas de coordenadas curvilíneas (SCC). Primero ejemplos: sistemas de coordenadas cartesianas, esférico, cilíndrico. Elementos de todo SCC: curvas coordenadas y superficies coordenadas asociadas a un punto. Vectores tangentes

asociados a las curvas coordenadas y superficies coordenadas que pasan por un punto de un SCC.

- Sistemas de coordenadas curvílineas ortogonales (SCCO): ejemplos, descripción geométrica y cálculos de los coeficientes métricos para: (a) sistemas de coordenadas cartesianas , cilíndricas y esféricas, (b) SCC parabólico, parabólico-cilndcrico, bipolar, cónico y toroidal, (c) SCC esferoidal achatado, SCC esferoidal alargado.
- Bases y bases recíprocas en todo punto de R^n asociadas a un SCC introducido en R^n y los vectores tangentes a las curvas coordenadas asociadas al punto.
- Campos escalares y campos vectoriales de posición definidos mediante un SCC introducido en R^n. Álgebra de derivadas de estos campos. El gradiente de una función escalar de posición.

Capítulo 3
Tensores covariantes y contravariantes. Tensores mixtos.

- Primer tiempo de un tensor una vez contravariante: cambio de las componentes de la velocidad de una partículaal pasar de un SCC a otro.
- Primer ejemplo de tensor de una vez covariante: cambio de las componentes del gradiente de una función escalar al pasar de un SCC a otro.
- El tensor de Levi-Civita. Algunos ejemplos de tensores mixtos una vez covariantes y contravariantes .
- Bases de un punto asociadas a dos SCC introducidos en R^n y la relación entre ellos las componentes covariantes y contravariantes de un vector asociado a un punto en un SCC y su cambio cuando variamos el SCC.
- Definición del vector covariante y vector contravariante. La mpetrica en un punto de un SCC $(x^1, x^2, ..., x^n)$ introducido en R^n. Variación de las componentes de la métrica cuando cambiamos de SCC.
- Primer ejemplo de un tensor dos covariante: el tensor métrico. Tensor métrico conjugado. Transformaciones afines y tensores cartesianos dos veces covariantes. El tensor de inercia en la mecánica de sólido rígido y el problema de sus diagonalización. Ejes principales de inercia en un sólido. Ejemplos.
- Tensores una vez contravariantes. Tensores relativos una vez contravariantes. Peso de un tensor. Tensores absolutos una vez covariantes. Leyes de transformación que los definen y ejemplos. Propiedad transitiva de una transformación covariante.
- Tensores dos veces contravariantes. Tensores relativos y tensores absolutos dos veces contravariantes. Peso de un tensor dos veces covariante. Leyes de transformación que los definen y ejemplos.
- Caso general de la definición de un tensor. Tensores relativos y tensores absolutos *p* veces covariantes y *q* veces contravariantes. Peso de un tensor y las leyes que los definen. Ejemplos.
- Operaciones con tensores: suma de tensores, producto exterior entre tensores, contracción de un tensor, producto interno entre tensores, ley de cocientes.
- Tensores asociados. Componentes físicos de un tensor. Símbolos de Chrstoffel de primera y segunda especie para un SCC $(x^1, x^2, ..., x^n)$ introducido en $R^{n.}$ Definición y cálculo de ellos a través de los coeficientes métricos definidos por la base de vectores tangentes alas curvas coordenadas.
- Relación entre los símbolos de Christoffel de primera y segunda especie. Derivadas de los vectores de la base recíproca en un SCC. El cálculo de los símbolos de

Christoffel en un SCCO. Obtención de los símbolos Christoffel para un sistema de coordenadas esférico y un sistema de coordenadas cilíndrico. Utilización de los símbolos de Christoffel. Expresiones de la aceleración en un sistema de coordenadas esféricos y un sistema de coordenadas cilíndrico. Variación de los símbolos de Christoffel al cambiar el SCC.

Capítulo IV
Derivación de tensores

- Derivada covariante de un tensor una vez covariante o una vez contravariante. Definición y carácter tensorial de la derivada. Derivada covariante de tensores dos veces covariante, dos veces contravariante y de tensores mixtos. La definición y su carácter tensorial.
- La derivada covariante de un tensor (relativo o absoluto) p veces covariante y q contravariante. Fórmulas para la derivada covariante del tensor métrico y de su recíproco (conjugado). Derivada del tensor métrico. Teorema de Ricci. Derivada contravariante. Interpretación física de la derivada covariante. Derivada absoluta o intrínseca de un tensor. Fórmulas para su cálculo. Derivada covariante y absoluta de un sistema y productos entre tensores.
- Reglas del cálculo tensorial y las reglas de la diferenciación ordinarias. Forma tensorial del gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano. Expresión de ellos en un SCCO y su cálculo en sistemas de coordenadas esféricas y cilíndricas. La segunda derivada covariante de un tensor covariante. La no conmutatividad de esta expresión. El tensor de Riemman – Christoffel o tensor de curvatura. Propiedades.
- Algunos elementos del cálculo de variaciones. La ecuación de Euler. Ecuación de las geodésicas de un espacio de Riemman y los símbolos de Christoffel.

Capítulo V
Aplicaciones del cálculo tensorial a la geometría diferencial.

- Curvas en un espacio de Riemman con tensor métrico g. Vector tangente, vector normal, curvatura y torsión en una curva. El triedro de Serret – Frenet. Superficies. Diferentes formas de definir una especie. Curvas coordenadas en una superficie y vectores tangentes a ella. Plano tangente en un punto.
- Curvatura de una superficie. Curvatura normal. Radio de curvatura. Curvatura de Gauss de una superficie. Ecuación de Gauss – Weingarten – Codazzi. La curva geodésica. Coordenadas geodésicas en una superficie.

3. Metodología

Clase magistral

4. Forma de Evaluación

La acordada por el profesor del curso.

5. Bibliografía

1. J.H. Heinbockel. “Introduction to tensor calculus and continuum Mechanics”
2. .J. McConnell. “Applications of tensor analysis”. Dover publications.
3. Harry Lass. “Vector and tensor analysis”. International student edition.
4. Robert C. Wrede. “Introduction to vector and tensor analysis”. Dover publications.
5. Harry F. Davis. “introduction to vector Analysis”
6. Murray R. Spiegel. “Análisis vectorial”. Serie Schaum.
7. Ubjnatan D`Ambrosio. Cálculo de variaciones.
8. Marion. Dinámica clásica.
9. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology
10. I.S. Sokolnikoff. Análisis tensorial
11. Enwing Kreyszig. Differential Geometry.
12. Luis A. Santalo. Vectores y tensores con sus aplicaciones.

Actualizado por: Jaime Chica Escobar