
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PREGRADO EN MATEMÁTICAS

Código: CNM- 517

Nombre: Análisis vectorial

Prerrequisitos: CNM-295

Duración del semestre: 16 semanas

Intensidad semanal: 4 horas teóricas

Número de créditos: 4

Campo de formación: Básico

Programa a los cuales se ofrece: Matemáticas y física

Este curso es habilitable y validable.

1. Objetivos

Al cursar y aprobar esta asignatura, el estudiante estará en capacidad de :

- Manejar con solvencia los operadores del Análisis Vectorial: gradiente, rotacional, divergencia, laplaciano en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal o nó.
- Manejar los resultados básicos del análisis armónico y la teoría del potencial.
- Aplicar los símbolos de Christoffel de 1^a y 2^a especie para el espacio asociado a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal o nó en el estudio de la geometría de éste.
- Aplicar los símbolos de Christoffel de 1^a y 2^a especie asociados a una parametrización de una superficie en el estudio de la geometría de ésta.
- Formular aplicaciones del teorema de Green, de Stokes, de la divergencia, de Gauss en la mecánica del sólido rígido, en la hidrodinámica, en el análisis armónico y la teoría del potencial y en la teoría electromagnética.

2. Contenido

Unidad 1::

- Breve repaso de las operaciones con vectores.
- Identidades Vectoriales.
- Productos de dos o más vectores.
- Relación de Gibbs. Identidad de Lagrange. Bases Recíprocas y Componentes COVA y CONTRA Variante de un vector.
- La métrica del espacio con respecto a una base.
- Aplicaciones a la trigonometría esférica.
- Otras identidades entre los elementos de un triángulo esférico.
- Solución de triángulos esféricos.
- Aplicaciones a la navegación y a la Astronomía de posición.
- Aplicaciones a la estática.
- Estudio del vector deslizante.
- Sistemas de fuerzas y su reducción.

- Momento de una fuerza y de un sistema de fuerzas respecto a un punto.
- Momento áxico (respecto a un eje) de una fuerza y de un sistema de fuerzas.
- Pares de fuerzas. Operaciones que permiten reducir un sistema de fuerzas a otro más simple.
- El Eje Central de Poisson de un sistema.
- Momento mínimo del sistema.
- Reducción de sistemas concurrentes, coplanares, paralelos.

Unidad 2:

- Funciones vectoriales de una variable.
- Curvas regulares.
- Vector velocidad y aceleración de una partícula.
- Aplicaciones a la cinemática.
- Componentes radial y transversa de la velocidad y la aceleración.
- Obtención de las leyes de Kepler a partir de la ley de Gravitación Universal y viceversa: el gran logro de Newton.
- Transformación de Coordenadas y el Teorema de la función inversa.
- Los tipos más comunes de sistemas de coordenadas curvilíneas (S.C.C).
- El Jacobiano de un S.C.C.
- Definición de la métrica del espacio respecto a un S.C.C y su empleo para hallar ángulos, distancias, normas de vectores, etc.
- Los símbolos de Christoffel. Su definición y empleo en un S.C.C. cualesquiera.
- Símbolos de Christoffel de primera y segunda especie en un sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal.
- Obtención de la velocidad y la aceleración de una partícula moviéndose en un S.C.C. cualquiera.
- Aplicaciones al caso de sistemas de coordenadas curvilíneas y esféricas.
- Curvatura y torsión de una curva. Radio de curvatura.
- Cálculo de estas cantidades y su significado físico. Independencia de estas nociones respecto a la parametrización de la curva. Longitud de una curva. Ejemplos.
- El parámetro natural (el arco) de una curva.
- La noción de superficie regular. Distintas formas de parametrizar una superficie.
- Superficies definidas implícitamente y el Teorema de la función implícita.
- Gradiente de un campo escalar y su expresión en cualquier S.C.C. Derivada direccional de un campo escalar. Su cálculo y significado físico.
- Plano tangente y vector unitario normal a una superficie.
- Coeficientes métricos asociados a una superficie.
- Estudio de la Primera Forma Fundamental de una superficie.
- Símbolos de Christoffel de primera y segunda especie asociados a una superficie. Su definición y empleo en los cálculos sobre ésta.
- Cálculo de la longitud de una curva contenida en una superficie. Cálculo del área de una superficie. Algunos ejemplos. Las superficies de revolución y el cálculo de sus elementos.

Unidad 3:

- Campos vectoriales definidos en un S.C.C. cualquiera.
- Derivadas direccionales de un campo. Propiedades y significado geométrico.

- Integral de línea en un Campo Vectorial. Ejemplos. Trabajo de una Fuerza. Independencia del camino.
- Campos Conservativos. Definición y ejemplos.
- Funciones potenciales.
- Condición suficiente y condición necesaria para que un Campo Vectorial definido sobre un abierto sea conservativo.
- Conjuntos Conexos.
- Conjuntos simplemente conexos.
- Integrales de línea y Homotopía.
- Definición de caminos homotópicos.
- La integral de una forma diferencial a lo largo de una curva. Teorema de cambio de variable. Teorema de Green en un rectángulo. Formas diferenciales inducidas.
- La integral de línea es invariante por homotopía. C.N y C.S. para que un campo vectorial definido sobre un abierto simplemente conexo sea conservativo. El rotacional de un campo vectorial.
- Integrales de superficie de un Campo Vectorial.
- Integrales de Volumen de un Campo Vectorial. Aplicaciones.
- Integrales de superficie y de volumen de un campo escalar. Aplicaciones.
- Flujo de un campo a través de una superficie. Significado Físico.
- Circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva.
- Origen de la noción de divergencia y rotacional de un campo vectorial. Explicación física.
- El Teorema de Green en el plano. Su demostración y aplicaciones.
- Cálculo de áreas en el plano utilizando el Teorema de Green.
- El Teorema de Cambio de Variable en la integración doble. Su demostración (a través del Teorema de Green) y aplicaciones.
- El problema isoperimétrico. Su formulación, su historia y su solución.
- El nacimiento del Cálculo Variacional.
- Definición de la divergencia de un Campo Vectorial dado en un S.C.C. esférico y cilíndrico.
- El Teorema de la divergencia. Demostración y aplicaciones.
- El Teorema de Gauss. Aplicaciones a la electrostática.

Unidad 4:

- El Teorema de Stokes (T.S). Enunciado y demostración.
- El Teorema de Green visto como un caso particular del T.S.
- El Teorema fundamental del Cálculo como un caso particular del T.S.
- Interpretación física del T.S.. Demostraciones heurísticas del T.S.
- El cálculo de las componentes del rotacional de un campo vectorial utilizando el T.S.
- Cálculo de integrales de línea a través del T.S.
- Cálculo de integrales de superficie utilizando el T.S.
- Transformación mediante el T.S. de integrales de superficie de un campo vectorial en integrales de línea y viceversa.
- El rotacional de un campo vectorial en un S.C.C. cualquiera.
- Caso en que el S.C.C es ortogonal.
- El rotacional en coordenadas esféricas, cilíndricas y cartesianas.
- Gradiente de un campo escalar, divergencia y rotacional de un campo vectorial en un S.C.C. ortogonal o no. Forma que toman estos operadores cuando el sistema es ortogonal.

- Identidades clásicas del Análisis Vectorial y su expresión utilizando el operador Nabla
- El Laplaciano de un campo vectorial. Expresión del Laplaciano en un S.C.C. y forma que toma en un S.C.C. ortogonal.
- La ecuación de Laplace y las funciones armónicas. Propiedades básicas de las funciones armónicas. Las fórmulas de Green del Análisis Vectorial.

Unidad 5:

- Campos irrotacionales y solenoidales. Definición y ejemplos.
- Una C.S. y C.N. para que un campo vectorial definido en un conjunto simplemente conexo sea irrotacional.
- Propiedades que caracterizan a un campo solenoidal.
- Teorema de Helmholtz: condiciones para que un campo pueda expresarse como la suma de dos partes: una irrotacional y otra solenoidal.
- Las funciones armónicas como solución a la Ecuación de Laplace. Ecuación de Laplace en un S.C.C. ortogonal.
- Valores de una función armónica dentro y en el contorno de su región de definición. Propiedades analíticas de las funciones armónicas. Funciones armónicas analíticas.
- Teorema del valor medio para funciones armónicas definidas en regiones infinitas. Funciones de Green. Propiedades de una función armónica y de su función de Green asociada. Fórmula de Green.
- El problema de Dirichlet.
- La integral de Poisson.
- El problema de Neumann. Funciones de Green de segunda especie. El recíproco del teorema del valor medio para funciones armónicas. Representación de funciones armónicas como potenciales.

Unidad 6:

- Aplicaciones a la mecánica.
- Energía cinética de un sistema de partículas.
- Principio Trabajo – Energía para una partícula.
- Ley de conservación de la energía.
- Dinámica del sólido rígido.
- Ecuaciones de Euler para la dinámica del sólido rígido.

Unidad 7:

- Aplicaciones a la Hidrodinámica.
- Ecuación de continuidad.
- Vector densidad de flujo.
- Fluido incompresible. Fluido perfecto o ideal.
- Ecuaciones de movimiento de Euler.
- Otras formas de escribir las ecuaciones de Euler.
- Ecuaciones de equilibrio para un fluido en reposo. Flujo uniforme. Líneas de flujo. La ecuación general de Bernoulli. Flujo irrotacional. Flujo rotacional. Flujo rotacional de un fluido incompresible ideal y la ecuación de Laplace.

Unidad 8:

- Aplicaciones a la Teoría Electromagnética.
- Principio de conservación de la carga y ecuación de continuidad.
- El campo electromagnético. Fuerza de Lorentz sobre una carga que se mueve en un campo electromagnético.
- Vectores de intensidad de Campo Eléctrico y de densidad de inducción magnética (o vector de flujo magnético). Valor de densidad de flujo eléctrico y vector de intensidad de campo magnético. Permitividad y permeabilidad de un medio.
- Ecuaciones de Maxwell.
- La ley de inducción de Faraday y las ecuaciones de Maxwell. Ley de Gauss para un campo eléctrico. Corriente de desplazamiento. Ley de Gauss para un campo magnético. Funciones potenciales del campo electromagnético. Energía en un campo electromagnético. El vector de Poynting. Densidad de energía del campo electromagnético. El Teorema de Poynting.
- Campos estáticos.
- Ecuaciones de Maxwell para estos casos.
- Ecuaciones de Laplace y Poisson para campos electrostáticos. Campo eléctrico y potencial de una carga puntual. Ley de Coulomb para campos electrostáticos, Dipolo eléctrico. Momento de un dipolo eléctrico. Ley de circuitos de Ampere en magnetostática. Ley de Gauss en electrostática.

Observaciones: dada la extensión del curso, entre los capítulos VI, VII y VIII, se desarrollará un solo (o a lo sumo dos de ellos) según las inclinaciones de los asistentes al curso.

3. Metodología

- Clase magistral.
- Talleres de apoyo.

4. Forma de evaluación

La acordada con el profesor del curso

5. Bibliografía

- Cálculo Vectorial, Claudio Pita Ruiz, Prentice Hall.
- Análisis Vectorial, Hwei P. Hsu, Raj Melna, Editor.
- Vector and Tensor Analysis, Harry Lass, International Student Edition.
- Análisis Vectorial, Philips, Uteha.
- Introduction to Vector Analysis, Harry F. Davis, Allyn and Bacon, Inc, Boston.
- Análisis Vectorial, Murray R. Spiegel, Serie Schaum.