

**CURSOS DE SERVICIOS
PARA LA FACULTAD DE INGENIERIA (Ing. Civil)
Transformación Curricular**

**GEOMETRÍA INTEGRADA
GEOMETRÍA EUCLIDIANA VECTORIAL Y ANALITICA**

CÓDIGO	MIG 110
Créditos	6
Prerrequisitos	Álgebra Lineal
Correquisitos	No tiene
Coordinador	Alberto Jaramillo Atehortua

TEMAS GENERALES

Elementos del Cálculo proposicional y cuantificacional.
Fundamentos de la Geometría Euclidiana
Desigualdades en el triángulo
Polígonos
La circunferencia
Proporcionalidad y semejanza
Áreas de figuras planas
Elementos de álgebra matricial
La función determinante
Vectores geométricos y coordenados
Aplicaciones de los vectores geométricos a la Geometría Analítica.

Nota: *La fundamentación completa de este curso, las orientaciones metodológicas y la propuesta curricular se encuentran en la dirección electrónica:* <http://docencia.udea.edu.co/cen/geometrias>

Contenido detallado por secciones

1. **Teoría deductiva o axiomática.** Proposiciones simples y compuestas. Conectivos fundamentales. Valores de verdad. La implicación lógica. La equivalencia lógica. La demostración. Reglas de prueba. Equivalencias básicas del cálculo proposicional.
2. **Métodos de demostración.** Método directo. Método del contrarrecíproco. Método de casos. Método de reducción al absurdo. Equivalencias básicas del cálculo cuantificacional. Método del contraejemplo. Relaciones de pertenencia e inclusión. Operaciones básicas entre conjuntos.
3. **Fundamentos de la Geometría Euclidiana.** Términos y relaciones primitivos. Axiomas de incidencia. Primeros teoremas sobre intersección de rectas distintas y determinación del plano. Axiomas de orden.

4. **Noción de figura.** Figura convexa. Segmento. Axioma de separación de la recta. Semirrecta. Axioma de separación del plano. Semiplanos. Axioma de separación del espacio. Semiespacios. Ángulo. Interior y exterior de un ángulo.
5. **Teorema de la Barra transversal.** Axiomas de congruencia. Triángulo. Interior y exterior del triángulo. Triángulos congruentes. Axioma de congruencia de triángulos (1er. caso: L-A-L). Teorema (2º caso de congruencia de triángulos: A-L-A).
6. **Triángulo isósceles.** Triángulo equilátero. Propiedades del triángulo isósceles. Ángulos adyacentes. Ángulos que hacen par lineal. Ángulos opuestos por el vértice. Teorema (3er. caso de congruencia de triángulos: L-L-L). Ángulos rectos. Rectas perpendiculares.
7. **Medida de segmentos y ángulos.** Consecuencias fundamentales. Ángulos agudos, obtusos, complementarios y suplementarios. Triángulo rectángulo. Punto medio de un segmento. Bisectriz de un ángulo no nulo y no llano. Teorema (Perpendicular levantada por un punto de una recta en un plano dado). Mediatriz de un segmento en un plano dado.
8. **Construcciones básicas:** Construir un segmento congruente a un segmento dado. Construir un ángulo congruente a un ángulo no nulo y no llano dado. Construir la mediatriz de un segmento. Levantar una perpendicular a una recta por un punto de ésta en un plano dado. Construir la bisectriz de un ángulo no nulo y no llano. Segmentos y rectas notables en el triángulo. Teorema (Propiedades de los segmentos y rectas notables en el triángulo isósceles). Teoremas recíprocos.
9. **Relaciones de desigualdad entre segmentos.** Teorema (Tricotomía en segmentos). Teorema (Transitividad en las relaciones de desigualdad entre segmentos). Relaciones de desigualdad entre ángulos. Teorema (Tricotomía entre ángulos). Teorema (Transitividad en las relaciones de desigualdad entre ángulos).
10. **Rectas paralelas.** Recta secante a dos rectas dadas. Ángulos: alternos internos, alternos externos, correspondientes, colaterales interiores, colaterales exteriores. Primer criterio del paralelismo: Teorema de los ángulos alternos internos. Corolarios. Ángulo exterior a un triángulo. Teorema del ángulo exterior de un triángulo (1ra. versión). Corolario.
11. **Teorema: Perpendicular única “bajada” desde un punto exterior a una recta dada.** Distancia de un punto a una recta. Teorema: Paralela a una recta trazada por un punto exterior a ella. Teorema (4º caso de congruencia de triángulos: L-A-A). Congruencia en triángulos rectángulos. Teorema (Congruencia de triángulos rectángulos caso hipotenusa - cateto) construcciones: construir una recta paralela por un punto exterior a una recta dada.
12. **V Postulado de Euclides.** Postulado de la paralela única de Playfair. Reseña histórica. Geometría absoluta. Relatividad del V postulado. Geometrías no Euclidianas. Geometrías hiperbólicas (Lobachevsky – Bolyai). Geometrías Elípticas (Riemann). Modelos de geometrías no Euclidianas: modelo de Klein, Modelo de Poincaré, Modelo de Riemann. Teorema: Equivalencia entre el V postulado de Euclides y el postulado de Playfair.
13. **Primeros resultados derivados del V Postulado de Euclides.** Teorema recíproco de los ángulos alternos internos. Ángulos determinados por rectas respectivamente paralelas o respectivamente perpendiculares. Segmentos de paralelas entre paralelas. Distancia entre dos rectas paralelas. Suma

de los ángulos interiores de un triángulo. Teorema del ángulo exterior (2a. versión). Construcciones: Dividir un segmento no nulo en n segmentos congruentes.

14. **Teorema de la paralela media.** Corolarios. Teorema (Relaciones angulares en el triángulo rectángulo 30° - 60° - 90°). Corolarios. Teorema de los puntos notables del triángulo y sus propiedades. Aplicaciones.
15. **Desigualdades en el triángulo:** Teorema (Relaciones ángulos versus lados). Teorema recíproco. Rectas oblicuas. Teorema (Relaciones entre perpendicular y oblicuas y relaciones métricas entre oblicuas). Teorema de la desigualdad triangular. Corolarios. Teorema de la bisagra. Teorema recíproco. Aplicaciones.
16. **Polígonos:** Poligonal. Polígono. Elementos de un polígono. Polígono simple. Interior y exterior de un polígono simple. Polígono convexo. Polígono convexo equiángulo. Polígono convexo equilátero. Polígono regular. Teorema (Número de diagonales de un polígono convexo). Teorema (Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo). Corolarios (Suma de los ángulos exteriores en un polígono convexo).
17. **Cuadriláteros convexos especiales:** El trapezoide, el trapecio, el paralelogramo, el rectángulo, el rombo, el cuadrado. Diagrama de inclusiones. Teorema (Propiedades por equivalencia del paralelogramo). Teorema (Propiedades por equivalencia del rectángulo). Teorema (Propiedades por equivalencia del rombo). Clasificación de los trapecios. Teorema (Propiedades del trapecio – base media). Teorema (Propiedades del trapecio isósceles).
18. **Aplicaciones generales en los cuadriláteros.**
19. **La circunferencia.** Definición. Nociones generales. Interior y exterior de la circunferencia. Círculo. Cuerdas. Arcos. Semicircunferencia. Segmento circular. Ángulo central. Sector circular. Recta secante y recta tangente. Teoremas básicos: Determinación de la circunferencia. Perpendicularidad del radio en el punto de tangencia. Recíproco. Posiciones relativas de una recta y una circunferencia coplanaria.
20. **Posiciones relativas de dos circunferencias coplanarias.** Síntesis. Aplicaciones. Medida de arcos bajo un punto de vista angular. Arco unitario. Postulado de adición de arcos. Circunferencias congruentes. Teorema (Cuerda máxima). Teorema (Distancia de un punto a una circunferencia coplanaria). Teoremas: Relaciones métricas ángulos - arcos y recíproco, ángulos – cuerdas y recíproco, arcos – cuerdas y recíproco.
21. **Teorema (Bisección de la cuerda por un radio perpendicular y recíproco).** Teorema (Relaciones entre cuerdas, según su distancia al centro y recíprocos). Teorema (Congruencia de los arcos comprendidos entre rectas paralelas). Teorema (Medida del ángulo inscrito). Teorema (Propiedades de los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a la circunferencia). Teorema (Medida del ángulo semi - inscrito). Teorema: Medida de ángulos con vértice en el interior o en el exterior de la circunferencia.
22. **Polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia.** Cuadriláteros inscriptibles en una circunferencia. Teorema (Criterios de inscriptibilidad de cuadriláteros convexos). Aplicaciones.

23. **Proporcionalidad y semejanza.** Nociones básicas: Razón, proporción, segmentos proporcionales. Teoremas fundamentales: Teorema (El paralelismo induce la proporción en el triángulo). Teorema de la proporcionalidad (Teorema de Thales). Teorema (Segundo criterio del paralelismo: la proporcionalidad induce el paralelismo en un triángulo). Teorema (Proporcionalidad inducida por la bisectriz en un triángulo).
24. **Polígonos semejantes.** Teoremas (casos de semejanza de triángulos). Teorema (relaciones métricas en el triángulo rectángulo inducidas por la proporcionalidad). Teorema de Pitágoras y recíproco. Teoremas (Relaciones métricas en los triángulos obtusángulos y acutángulos). Teorema de Stewart.
25. **Potencia de un punto.** Relaciones métricas en la circunferencia. Aplicaciones.
26. **Áreas de figuras planas.** La función área y sus propiedades. Polígonos equivalentes. Teoremas (Áreas del rectángulo, paralelogramo, triángulo, trapecio y rombo). Teorema: Fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo. Aplicaciones.
27. **Teorema (Área de un polígono regular).** Teorema (Cuadratura de un polígono convexo). Longitud de la circunferencia. Área del círculo. El número π . Área del sector circular. Área del segmento circular. Longitud de un arco. Sistema radial de medición.
28. **Matrices de componentes reales.** Notación. Convenciones. Matrices fila y columna. Igualdad en las matrices. Algunos tipos de matrices: Nula, Identidad, triangular inferior, triangular superior, diagonal, escalar. Operaciones: adición, propiedades de esta operación.
29. **Producto de un real por una matriz, propiedades de esta operación.** Combinación lineal de matrices. Producto entre matrices. Criterios alternos: combinación lineal de filas, combinación lineal de columnas. Propiedades de esta operación. Problemas de aplicación.
30. **Traspuesta de una matriz. Propiedades de la traspuesta.** Matriz simétrica. Matriz antisimétrica. Sistema de Ecuaciones Lineales (S.E.L.) conjunto solución. Matriz escalonada reducida. Matriz escalonada. Ecuación matricial equivalente de un S.E.L.
31. **Sistemas equivalentes.** Operaciones elementales. Algoritmos de reducción de Gauss y Gauss-Jordan. Tipos de solución de un S.E.L. Problemas de aplicación.
32. **Matrices elementales.** Propiedades. Matrices equivalentes. Inversa de una matriz cuadrada. Propiedades de la inversa. Factorización de una matriz en términos de matrices elementales.
33. **Algoritmo general por reducción para calcular la inversa de una matriz cuadrada.** Ilustraciones.
34. **Definición de la función determinante y sus propiedades.** Cálculo del determinante mediante expansión por cofactores. Limitaciones prácticas. Cálculo de determinante mediante las propiedades.
35. **Determinantes e inversa.** Cálculo de la inversa por la adjunta. La regla de Cramer.

36. **Vector geométrico.** Características (magnitud, dirección, sentido), igualdad en los vectores geométricos. Vector nulo. Vector opuesto. Adición de vectores geométricos. Propiedades de esta operación. La desigualdad triangular.
37. **Producto de un real por un vector geométrico.** Propiedades. Criterio del paralelismo. Criterio de colinealidad. Teorema de la proporción. Teorema de la base.
38. **Aplicaciones a la geometría euclidiana.**
39. **Vectores unitarios.** Vectores ortogonales. Vectores ortonormales. Sistemas Ortonormales Vectores de posición. Operaciones que involucran los vectores de posición. Correspondencia entre vectores geométricos y vectores coordenados. La recta.: Ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de la recta en el espacio y en el plano, dados un punto y un vector paralelo.
40. **El producto escalar entre dos vectores.** Propiedades. Producto escalar en una base ortonormal. Aplicaciones a la Geometría analítica. Ecuaciones de la recta y el plano.
41. **El producto vectorial entre dos vectores.** Propiedades: producto vectorial en una base ortonormal. Aplicaciones a la Geometría Analítica.
42. **El producto mixto.** Propiedades. Producto mixto en un sistema ortonormal. Volumen del prisma. Volumen del tetraedro. Volumen de la pirámide. Otras aplicaciones. Ecuación de un plano.
43. **Aplicaciones generales.**

EVALUACIÓN

Orientaciones metodológicas

Los instrumentos diseñados para evaluar, deberán en lo posible mostrar las competencias adquiridas por el estudiante mínimamente, en los siguientes aspectos:

- Planteamiento y resolución de problemas.
- Razonamiento matemático (Formulación, argumentación y demostración)
- Comunicación matemática; esto es una consolidación de la manera de pensar en términos de los objetos y las relaciones geométricas, manifiesta en la formulación oral y escrita de juicios coherentes, claros y precisos.

Para lograr este objetivo, el docente deberá tener en cuenta en la elaboración y aplicación de cada prueba los siguientes elementos.

1. Formulación de teoremas para demostrar. Inicialmente pueden darse explícitamente las hipótesis y la tesis, para facilitar su ubicación y manejo pero más adelante se le propondrán enunciados a partir de los cuales el estudiante deberá hacer explícitos estos elementos.
2. Formulación de problemas que obliguen a cualificar la información suministrada, diferenciando los datos de los resultados pedidos. En ellos se buscará que el estudiante pueda expresar en el lenguaje matemático, los contenidos implícitos y establecer las relaciones adecuadas, entre los objetos matemáticos estudiados, como

también la implementación de las estrategias correctas para construir los argumentos necesarios que le permitan acertadamente llegar a los resultados pedidos

3. Formulación de enunciados fundamentalmente descriptivos, sin ningún apoyo gráfico, que demanden la construcción mental de las relaciones simbólicas precisas las cuales deben ser representadas gráficamente por el estudiante, como un apoyo necesario para la solución de la situación planteada.

4. Análisis de las teorías estudiadas; cuestionando las condiciones necesarias y suficientes en los teoremas y definiciones.

5. Indagar por los procesos argumentativos pertinentes que validan una proposición determinada, según las características de la misma, demostración directa, demostración por reducción al absurdo, método del contraejemplo.

6. Demandar la utilización del lenguaje básico de la teoría de conjuntos y de las convenciones acordadas para designar los objetos y las relaciones geométricas fundamentales, exigiendo su uso apropiado y la redacción precisa que permita la comunicación correcta y abreviada.

7. Explorar distintas manifestaciones del pensamiento geométrico, haciendo énfasis en las construcciones geométricas.

8. Tener presente que las características particulares de un curso formativo, con el cual se aspira a fortalecer estructuras específicas de pensamiento. tiene como columna vertebral la argumentación lógica y todos sus componentes que le son inherentes y en consecuencia esta se constituye en un objeto de estudio y de aplicación permanente en el curso.

Debe tenerse en cuenta, en consecuencia que la metodología implementada por el docente, debe proveer al estudiante de los recursos y medios necesarios, que le permitan la aprensión de los logros esperados.

Programación de las evaluaciones

Por las características del curso en cuanto a extensión, complejidad temática y su ubicación en el primer semestre, es necesaria la realización de evaluaciones continuas, que eviten la concentración de temas muy amplios y que estimule el trabajo permanente del estudiante. En este sentido se propone la realización de 5 pruebas parciales de igual valor que se intercalarán entre las secciones ya descritas y dos pruebas cortas, buscando además una distribución equitativa en la programación y la coherencia temática requerida.

Las evaluaciones se distribuyen así:

ORDEN DE LA PRUEBA		No. REUNIÓN EN LA QUE SE EFECTÚA	SESIONES DEL PROGRAMA QUE COMPRENDEN
1ª	5%	4	1 - 2
2ª	18%	13	3 - 9
3ª	18%	22	10 - 18
4ª	18%	33	19 - 27

5ª	18%	40	34 – 40
6ª	18%	46	41-43
7ª	5%	49	

TEXTO GUÍA:

- Jaramillo Atehortua, Alberto.. Notas para el curso de Geometría Euclidiana. Universidad de Antioquia.
- Jaramillo, A. Oleas, G. Geometría Vectorial y Analítica. Una Introducción al álgebra lineal. Universidad de Antioquia. Ude@ 2006
- Jaramillo, A. Londoño, R. Geometría Euclidiana Vectorial y Analítica. Universidad de Antioquia. Texto electrónico: dirección <http://docencia.udea.edu.co/cen/geometrias>
- Jaramillo A. Alberto. Fundamentos de lógica y teoría de conjuntos. Universidad de Antioquia. Texto electrónico; dirección <http://docencia.udea.edu.co/cen/logica>

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

- Clemens y otros. Geometría. · Addison Wesley Longman
- Velasco Sotomayor, Gabriel. Tratado de Geometría. Limusa
- Londoño Santamaría, Rodolfo. Geometría Euclidiana. Universidad de Antioquia 2005 Ude@
- Reunión de profesores. Curso de Geometría. Ligel París, 1958.
- Hemmerling, Edwin M. Geometría Elemental. Limusa. México. 1993.
- Landaverde, Felipe de J. Curso de Geometría. Editorial Retina. Bogotá.
- Florey Francis G. Fundamentos de Álgebra Lineal y aplicaciones.
- Grossman Stanley. Álgebra Lineal. Mc. Graw Hill. 1997
- Space Mathematics. A Resource for Secondary School Teachers.
- Nacional Aeronautics and Space Administración.
- Courant, Robbins. ¿Qué es la matemática?
- Dou, Alberto. Fundamentos de la matemática